Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

EXERCICE 1

Soient a, b, c trois reels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a Montrer $M^2 = 3M$

   b En deduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0, 3\}$.

2. a Determiner les valeurs propres de M et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associe

   b La matrice M est-elle diagonalisable ?

On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?

   b. Vérifier : $M = PDP^{-1}$.

4. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$.

5. Montrer que l'ensemble des matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

A. 1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

2. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}, \text{ et établir : } \begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}.$$

3. Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0).
Est-ce un minimum ou un maximum ?

B. On note $g : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0 ; +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0, et que $\dfrac{1}{2} < x_0 < 1$.

2. Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0.

4. a. Montrer : $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $|g'(x)| \leq 0{,}125$, où g' désigne la dérivée de g.

b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_0| \leq (0{,}125)^{n-1} \cdot 0{,}5$.

c. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.

d. Montrer que $f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

EXERCICE 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de «pile» soit égale à p, $p \in]0;1[$.
On pourra noter $q = 1-p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de «6» obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de «6» obtenus aux lancers du dé,
X indique le nombre de «piles» obtenus aux lancers de la pièce,
Y indique le nombre de «faces» obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, X + Y = Z et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / Z = n)$.
On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

si $0 \leq k \leq n \leq N$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = C_n^k C_N^n p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$,

si $n > N$ ou $k > n$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$.

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}.$$

En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X,Y).

8. En comparant les variances de Z et de X+Y, déterminer la covariance du couple (X,Y).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail